الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي

دورة: 2021

الشعبة: علوم تجريبية

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: 03 سا و30 د

**على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:**

## الموضوع الأول

### التمرين الأول: ( 04 نقاط )

يُراد تشكيل بطريقة عشوائية لجنة تتكون من عضوين من بين ثلاثة رجال $H_1$ ، $H_2$ و $H_3$ و امرأتان $F_1$ و $F_2$ .

نعتبر الحوادث $A$ ، $B$ و $C$ حيث: $A$ " عضوا اللجنة من نفس الجنس ".

$B$ " عضوا اللجنة من جنسين مختلفين ".

$C$ " $H_1$ عضو في اللجنة ".

1) أ. احسب $p(A)$ ، $p(B)$ احتمال $A$ و $B$ على الترتيب.

ب. بيّن أنّ $p(C)$ احتمال الحدث $C$ يساوي $\frac{2}{5}$.

2) المتغير العشوائي $X$ يرفق بكلّ إمكانية اختيار لعضوين عدد الرّجال في اللّجنة.

أ. برّر أنّ مجموعة قيم $X$ هي $\{0;1;2\}$.

ب. عيّن قانون احتمال المتغير العشوائي $X$ و احسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

### التمرين الثاني: ( 04 نقاط )

**أجب بصح أو خطأ مع التبرير في كل حالة من الحالات التالية:**

1) الدّالة العددية $f$ معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x+\frac{2}{e^x+1}$

من أجل كلّ عدد حقيقي $x$ لدينا: $f(x)+f(-x)=2$

2) $(u_n)$ متتالية هندسية معرّفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأول $2$ وأساسها $\frac{1}{3}$ ، نضع: $S_n=u_0+u_1+\ldots+u_n$

من أجل كل عدد طبيعي $n$ عبارة $S_n$ هي: $3-\frac{1}{3^{n+1}}$

3) الدّالة العددية $g$ المعرّفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x+\ln(e^x+1)$

تمثيلها البياني $(C)$ في المستوي المنسوب إلى معلم يقبل مستقيما مقاربا مائلا $y=2x$ معادلة له.

4) الدّالة العددية $h$ المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x)=e^{3x}+\frac{1}{3}$ هي حلّ للمعادلة التفاضلية $y'-3y=1$

**التمرين الثالث: ( 05 نقاط )**

المتتالية العددية $(u_n)$ معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n = -4n+3$

1) بيّن أنّ المتتالية $(u_n)$ حسابية يُطلب تعيين أساسها $r$ وحدّها الأول $u_0$.

2) من أجل كلّ عدد طبيعي $n$ نضع: $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

أ. بيّن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي $n$: $S_n = -2n^2 + n + 3$

ب. عيّن قيمة العدد الطبيعي $n$ حيث: $S_n = -30132$

3) المتتالية العددية $(v_n)$ حدودها موجبة تماما و من أجل كلّ عدد طبيعي $n$: $u_n = \ln(v_n)$

أ. اكتب عبارة الحد العام $v_n$ بدلالة $n$.

ب. بيّن أنّ المتتالية $(v_n)$ هندسية أساسها $e^{-4}$.

4) من أجل كل عدد طبيعي $n$ نضع: $S'_n = \ln[v_0(1-\frac{1}{2})] + \ln[v_1(1-\frac{1}{3})] + \cdots + \ln[v_n(1-\frac{1}{n+2})]$

احسب $S'_n$ بدلالة $n$.

**التمرين الرابع: ( 07 نقاط )**

I) الدّالة العددية $g$ معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 2x^3 - 2x^2 + 3x - 2$

1) بيّن أنّ الدّالة $g$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

2) أ. بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ يُحقّق: $0,7 < \alpha < 0,8$

ب. استنتج حسب قيم العدد الحقيقي $x$ إشارة $g(x)$.

II) الدّالة العددية $f$ معرّفة على $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ بـ: $f(x) = 2x - 1 + \ln\left(1 + \frac{1-x}{x^2}\right)$

$(C)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ. بيّن أنّ: $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$ ثم فسّر النتيجة هندسيا.

ب. احسب $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to +\infty} f(x)$.

2) أ. بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي غير معدوم $x$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x(x^2 - x + 1)}$

ب. استنتج أنّ $f$ متزايدة تماما على كلّ من $]-\infty;0[$ و $[\alpha;+\infty[$ ومتناقصة تماما على $]0;\alpha]$.

جـ. شكّل جدول تغيّرات الدّالة $f$.

3) بيّن أنّ المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة $y = 2x - 1$ مقارب مائل لـ$(C)$ ثمّ ادرس وضعية $(C)$ بالنسبة إلى $(\Delta)$

4) بيّن أنّ $(C)$ يقبل مماسا $(T)$ موازيا لـ $(\Delta)$ في النّقطة $A$ ذات الفاصلة 2 ثمّ اكتب معادلة له.

5) بيّن أنّ $(C)$ يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها $\beta$ تُحقّق: $-0,5 < \beta < -0,4$

6) ارسم $(\Delta)$، $(T)$ و المنحنى $(C)$. ( نأخذ: $f(\alpha) \approx 0,87$ ).

انتهى الموضوع الأول

تصحيح رياضيات باك 2021 ع-ت

# الموضوع الأول

## التمرين 1 (04ن)

5 أشخاص: 3 رجال ← $H_1, H_2, H_3$ ، 2 نساء ← $F_1, F_2$

لجنة تتكون من عضوين

عدد الحالات الكلية $C_5^2 = 10$

1) أ) A: عضوا اللجنة من نفس الجنس

$P(A) = \frac{C_3^2 + C_2^2}{10} = \frac{4}{10} = \boxed{\frac{2}{5}}$

B: عضوا اللجنة من جنسين مختلفين

$P(B) = 1 - P(A) = 1 - \frac{2}{5} = \boxed{\frac{3}{5}}$

ب) C: $H_1$ عضو في اللجنة

$P(C) = \frac{C_1^1 \times C_4^1}{10} = \frac{4}{10} = \boxed{\frac{2}{5}}$

2) X يرفق بكل اختيار عدد الرجال في اللجنة.

أ) تبرير قيم X

لجنة تضم امرأتين فقط عدد الرجال ← 0

لجنة تضم امرأة ورجل فإن عدد الرجال ← 1

لجنة تضم رجلين فإن عدد الرجال ← 2

وقيم X هي $\{0,1,2\}$

ب) قانون احتمال X

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $P(X=x_i)$ | 1/10 | 6/10 | 3/10 |

$P(X=0) = \frac{C_2^2}{10} = \frac{1}{10}$

$P(X=1) = \frac{C_3^1 \times C_2^1}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

$P(X=2) = \frac{C_3^2}{10} = \frac{3}{10}$

الأمل الرياضياتي

$E(X) = \sum_{i=1}^{3} p_i x_i$

$= 0 \times \frac{1}{10} + 1 \times \frac{6}{10} + 2 \times \frac{3}{10}$

$E(X) = \frac{12}{10} = \boxed{\frac{6}{5}}$

## التمرين 2 (04ن)

1) صحيح لأن

$f(x) = x + \frac{2}{e^x+1}$

$f(x) + f(-x) = \cancel{x} + \frac{2}{e^x+1} - \cancel{x} + \frac{2}{e^{-x}+1}\left(\frac{e^x}{e^x}\right)$

$= \frac{2}{e^x+1} + \frac{2e^x}{e^x+1}$

$= \frac{2(e^x+1)}{e^x+1} = \boxed{2}$

2) خطأ لأن

$(u_n)$ هندسية حيث $u_0 = 2$ و $q = \frac{1}{3}$

$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

$= u_0 \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$

$= 2 \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}-1}{\frac{1}{3}-1}$

$= -3\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}-1\right)$

$= 3 - 3\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$

$= 3 - 3\left(\frac{1}{3^{n+1}}\right)$

$\boxed{S_n = 3 - \frac{1}{3^n}}$

3) صحيح لأن

$D = [0, +\infty[ \quad g(x) = x + \ln(e^x+1)$

$\lim_{x\to+\infty} g(x) - 2x = \lim_{x\to+\infty} \ln(e^x+1) - x$

$= \lim_{x\to+\infty} \ln(e^x+1) - \ln e^x$

$= \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{e^x+1}{e^x}\right)$ ← 1

$= \boxed{0}$

اذن (C) يقبل عند $+\infty$ م م مائل معادلته $y = 2x$

4) خطأ لأن

$h(x) = e^{3x} + \frac{1}{3}$

$h'(x) - 3h(x) = 3e^{3x} - 3\left(e^{3x} + \frac{1}{3}\right)$

$= 3e^{3x} - 3e^{3x} - 1$

$= \boxed{-1} \quad (-1 \neq 1)$

ليست h حلا للمعادلة $y' - 3y = 1$

## التمرين 3 (05ن)

$u_n = -4n + 3$

1) $(u_n)$ حسابية

$u_{n+1} - u_n = (-4(n+1)+3) - (-4n+3)$

$= \boxed{-4}$

$(u_n)$ حسابية أساسها $r = -4$

وحدها الأول $\boxed{u_0 = 3}$

2) أ) $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

$= \frac{n+1}{2}(u_0 + u_n)$

$= \frac{n+1}{2}(3 - 4n + 3)$

$= \frac{n+1}{2}(-4n + 6)$

$= (n+1)(-2n+3)$

$\boxed{S_n = -2n^2 + n + 3}$

ب) تعيين n حيث $S_n = -30132$

أي $-2n^2 + n + 3 = -30132$

$-2n^2 + n + 30135 = 0$

$\Delta = 241081 \quad n_1 = \frac{-245}{2} \quad n_2 = 123$

ومنه $n = 123$ عدد طبيعي

3) $(v_n)$ متتالية موجبة تماما

$u_n = \ln(v_n)$

أ) $u_n = \ln(v_n)$ تعني $v_n = e^{u_n}$

$\boxed{v_n = e^{-4n+3}}$

ب) $(v_n)$ هندسية

$v_{n+1} = e^{-4(n+1)+3}$

$= e^{-4n-4+3}$

$= e^{-4n+3} \times e^{-4}$

$v_{n+1} = v_n \times e^{-4}$

$(v_n)$ هندسية أساسها $q = e^{-4}$

وحدها الأول $v_0 = e^3$

ج) $S'_n = \ln\left[v_0\left(1-\frac{1}{2}\right)\right] + \ln\left[v_1\left(1-\frac{1}{3}\right)\right] + \dots + \ln\left[v_n\left(1-\frac{1}{n+2}\right)\right]$

لدينا $\ln\left[v_n\left(1-\frac{1}{n+2}\right)\right] = \ln\left[v_n\left(\frac{n+1}{n+2}\right)\right]$

$\ln\left[V_n\left(1-\frac{1}{n+2}\right)\right]=\ln(V_n)+\ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right)$

$=U_n+\ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right)$

$S'_n=\left(U_0+\ln\frac{1}{2}\right)+\left(U_1+\ln\frac{2}{3}\right)+\dots+\left(U_n+\ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right)\right)$

$=\left(U_0+U_1+\dots+U_n\right)+\left(\ln\frac{1}{2}+\ln\frac{2}{3}+\dots+\ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right)\right)$

$S'_n=S_n+\ln\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\dots\times\frac{n+1}{n+2}\right)$

$=S_n+\ln\left(\frac{1}{n+2}\right)$

$\boxed{S'_n=-2n^2+n+3-\ln(n+2)}$

## التمرين 4 (ت7)

I) $g(x)=2x^3-2x^2+3x-2$

$D=]-\infty,+\infty[$

1) $g'(x)=6x^2-4x+3$

$6x^2-4x+3=0$ اذن

$\Delta=-56$ ، $6x^2-4x+3>0$

$g'(x)>0$ ومنه g متزايدة تماما على IR

2) أ- g مستمرة ومتزايدة تماما على $[0,7;0,8]$ و

$g(0,7)=-0,194$ ، $g(0,8)=0,144$

$g(0,7)\times g(0,8)<0$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $0,7<\alpha<0,8$

تحقق $g(\alpha)=0$

ب)

| $x$ | $-\infty$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |

II) $f(x)=2x-1+\ln\left(1+\frac{1-x}{x^2}\right)$

$D=]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$

1) أ) $\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}2x-1+\ln\left(1+\frac{1-x}{x^2}\right)=+\infty$

لأن $\lim_{x\to0}\frac{1-x}{x^2}=+\infty$ و $\lim_{x\to0}\ln\left(1+\frac{1-x}{x^2}\right)=+\infty$

$x=0$ معادلة مستقيم مقارب موازي لحامل محور التراتيب

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}2x-1+\ln\left(1+\frac{1-x}{x^2}\right)=\boxed{-\infty}$

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}2x-1+\ln\left(1+\frac{1-x}{x^2}\right)=\boxed{+\infty}$

2) أ- $f'(x)=2+\dfrac{\frac{x-2}{x^3}}{1+\frac{1-x}{x^2}}$

$=2+\dfrac{\frac{x-2}{x^3}}{\frac{x^2-x+1}{x^2}}$

$=2+\frac{x-2}{x^3}\times\frac{x^2}{x^2-x+1}$

$=2+\frac{x-2}{x(x^2-x+1)}$

$=\frac{2(x^3-x^2+x)+x-2}{x(x^2-x+1)}$

$=\frac{2x^3-2x^2+3x-2}{x(x^2-x+1)}$

$\boxed{f'(x)=\frac{g(x)}{x(x^2-x+1)}}$ من أجل كل x من $IR^*$

ب) إشارة $f'(x)$

$x^2-x+1=0$

$\Delta=-3$ ومنه $x^2-x+1>0$

اذن إشارة $f'(x)$ من إشارة $\frac{g(x)}{x}$ على $IR^*$

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $x$ | $-$ | $+$ | | $+$ |
| $\frac{g(x)}{x}$ | $+$ | $-$ | $0$ | $+$ |

اذن f متزايدة تماما على كل من المجالين $]-\infty,0[$ و $[\alpha,+\infty[$ و f متناقصة تماما على $]0,\alpha]$

جـ)

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | ‖ $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $-\infty \nearrow +\infty$ | ‖ $+\infty \searrow$ | $f(\alpha)$ | $\nearrow +\infty$ |

3) معادلة (Δ) $y=2x-1$

$\lim_{|x|\to+\infty}f(x)-(2x-1)=\lim_{|x|\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1-x}{x^2}\right)=\boxed{0}$

(Δ) ذو المعادلة $y=2x-1$ مقارب مائل لـ (C)

الوضعية النسبية لـ (C) و (Δ)

$f(x)-y=\ln\left(1+\frac{1-x}{x^2}\right)=\ln\left(\frac{x^2-x+1}{x^2}\right)$

$\ln\left(\frac{x^2-x+1}{x^2}\right)=0$ يعني $\frac{x^2-x+1}{x^2}=1$ يعني $x^2-x+1=x^2$ أي $-x+1=0$

$\boxed{x=1}$

$\ln\left(\frac{x^2-x+1}{x^2}\right)>0$ يعني $\frac{x^2-x+1}{x^2}>1$ يعني $\frac{x^2-x+1}{x^2}-1>0$ يعني $\frac{-x+1}{x^2}>0$ يعني $-x+1>0$ يعني $\boxed{x<1}$

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $\ln\left(\frac{x^2-x+1}{x^2}\right)$ | $+$ | ‖ $+$ | $0$ | $-$ |
| الوضعية | (C) فوق (Δ) | ‖ (C) فوق (Δ) | M | (C) تحت (Δ) |

(C) و (Δ) تتقاطع في $M(1,1)$

4) (C) يقبل مماس (T) يوازي (Δ) في نقطة A

$f'(x)=2$ أي $\frac{2x^3-2x^2+3x-2}{x^3-x^2+x}=2$ يعني

$\cancel{2x^3}-\cancel{2x^2}+3x-2=\cancel{2x^3}-\cancel{2x^2}+2x$ أي $\boxed{x=2}$

$A\left(2;3+\ln\frac{3}{4}\right)$ ومعادلته هي

$y=f'(2)(x-2)+f(2)=2(x-2)+3+\ln\frac{3}{4}$

$y=2x-1+\ln\frac{3}{4}$

5) (C) يقطع حامل محور الفواصل

لدينا f مستمرة ومتزايدة تماما على $[-0,5;-0,4]$

$f(-0,5)\times f(-0,4)<0$ و $f(-0,4)=0,477$ ، $f(-0,5)=-0,054$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\beta$ حيث $-0,5<\beta<-0,4$ اذن (C) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة $M(\beta,0)$

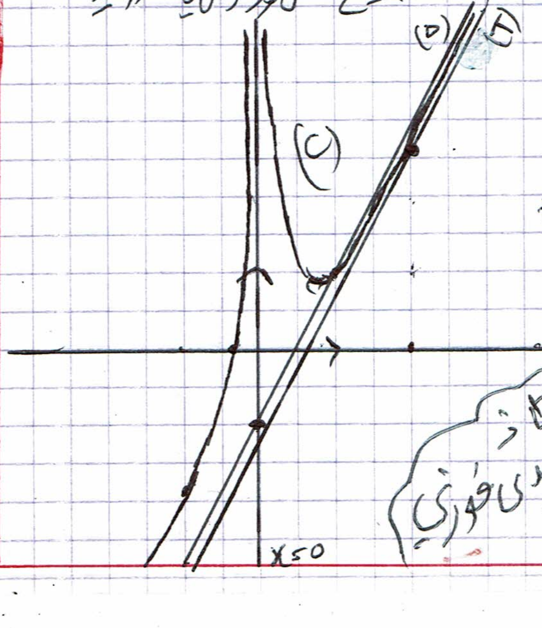
6) الرسم

$f(\alpha)=0,87$

$f(-1)=-1,9$

$f(1)=2$

$f(2)=2,71$




أ. سعداوي فوزي

24/06/2021

## الموضوع الثاني

### التمرين الأول: ( 04 نقاط )

صندوق به 9 بطاقات متماثلة لا نفرّق بينها باللمس، مكتوب على كلّ منها سؤال واحد، منها ثلاثة أسئلة في الهندسة مرقمة بـ: 1، 2 و 3، أربعة أسئلة في الجبر مرقمة بـ: 1، 2، 3 و 4 وسؤالين في التحليل مرقمين بـ: 1 و 2.

نسحب عشوائيا بطاقة واحدة من الصندوق ونعتبر الحوادث التالية:

$A$ "سحب سؤال في الهندسة"، $B$ "سحب سؤال في التحليل" و $C$ "سحب سؤال في الجبر يحمل رقما زوجيا".

**1)** احسب $p(A)$، $p(B)$ و $P(C)$ احتمال الحوادث $A$، $B$ و $C$ على الترتيب.

**2)** احسب احتمال سحب سؤال رقمه مختلف عن 1.

**3)** المتغيّر العشوائي $X$ يرفق بكلّ بطاقة مسحوبة رقم السؤال المسجل عليها.

أ. برّر أنّ مجموعة قيم $X$ هي $\{1;2;3;4\}$.

ب. عيّن قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي $X$ ثمّ احسب $E(X)$ أمله الرّياضياتي.

جـ. استنتج قيمة $E(2021X+1442)$.

### التمرين الثاني: ( 04 نقاط )

**لكلّ سؤال جواب واحد فقط صحيح من بين الأجوبة الثلاثة المقترحة، عيّنه مع التعليل.**

**1)** لتكن $(u_n)$ متتالية حسابية معرّفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأول 1 و أساسها 2

نضع من أجل كلّ عدد طبيعي $n$: $P_n = e^{u_0}\times e^{u_1}\times\cdots\times e^{u_n}$. عبارة $P_n$ هي:

أ) $e^{n(n+1)}$ ب) $e^{(n+1)^2}$ جـ) $e^{-n(n+1)}$

**2)** الدّالة العددية $f$ معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\ln(x^2+2x+3)$. من أجل كلّ عدد حقيقي $x$ لدينا:

أ) $f(-2-x)=f(x)$ ب) $f(2-x)=f(x)$ جـ) $f(-x)=f(x)$

**3)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln(x+1)-\ln(x+2)\right]$ تساوي:

أ) $1$ ب) $+\infty$ جـ) $0$

**4)** $(w_n)$ متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$ حدودها موجبة تماما وأساسها عدد حقيقي $q$ موجب تماما و يختلف عن 1

نضع: من أجل كلّ عدد طبيعي $n$، $v_n=\ln w_n$

$(v_n)$ هي متتالية :

أ) هندسية. ب) حسابية. جـ) لا حسابية و لا هندسية.

### التمرين الثالث: ( 05 نقاط )

المتتالية العددية $(u_n)$ معرفة بحدّها الأوّل $u_0$ حيث: $u_0=0$ ومن أجل كلّ عدد طبيعي $n$: $u_{n+1}=\frac{3}{8}(u_n+5)$

**1)** برهن بالتراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي $n$: $u_n<3$

**2)** بيّن أنّ $(u_n)$ متزايدة تماما ثمّ استنتج أنّها متقاربة.

3) المتتالية العددية $(v_n)$ معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = 3(3-u_n)$

أ. احسب $v_0$ ثمّ بيّن أنّ المتتالية $(v_n)$ هندسية أساسها $\frac{3}{8}$.

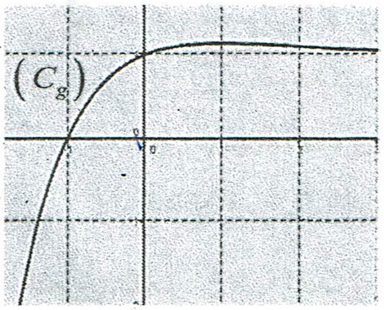
ب. اكتب بدلالة $n$ عبارة الحد العام $v_n$ ثمّ استنتج أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي $n$: $u_n = 3-3\left(\frac{3}{8}\right)^n$.

جـ. احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

4) نضع من أجل كلّ عدد طبيعي $n$: $P_n = (3-u_0)\times(3-u_1)\times\cdots\times(3-u_n)$

احسب $P_n$ بدلالة $n$.

**التمرين الرابع: ( 07 نقاط )**




I) الدّالة العددية $g$ معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 1 + xe^{-x-1}$، $(C_g)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$(الشكل المقابل)

1) احسب $g(-1)$.

2) بقراءة بيانية، حدّد حسب قيم $x$ إشارة $g(x)$.

II) الدّالة العددية $f$ معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x-(x+1)e^{-x-1}$

$(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) تَحقّق أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي $x$ غير معدوم: $f(x) = x[1-(1+\frac{1}{x})e^{-x-1}]$

ثمّ احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أ. بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي $x$: $f'(x) = g(x)$

ب. استنتج أنّ الدالة $f$ متزايدة تماما على $]-1;+\infty[$ ومتناقصة تماما على $]-\infty;-1]$ ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

3) أ. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)$ ثمّ فسّر النّتيجة هندسيا.

ب. ادرس وضعية $(C_f)$ بالنسبة إلى المستقيم $(\Delta)$ ذي المعادلة $y = x$

جـ. بيّن أنّ $(C_f)$ يقبل مماسا $(T)$ موازيا للمستقيم $(\Delta)$ يُطلب كتابة معادلة له.

4) أ. بيّن أنّ $(C_f)$ يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما $\alpha$ و $\beta$

حيث: $0,3 < \alpha < 0,4$ و $-1,9 < \beta < -1,8$

ب. ارسم المستقيمين $(\Delta)$ و $(T)$ ثمّ ارسم المنحنى $(C_f)$ على المجال $[-2;+\infty[$.

5) الدّالة العددية $h$ معرّفة على المجال $[-2;2]$ بـ: $h(x) = -|x| + (|x|-1)e^{|x|-1}$

$(C_h)$ تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ. بيّن أنّ الدّالة $h$ زوجية.

ب. بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي $x$ من المجال $[-2;0]$ : $h(x) = f(x)$

جـ. اشرح كيف يمكن رسم $(C_h)$ انطلاقا من $(C_f)$ ثمّ ارسمه.

انتهى الموضوع الثاني

تصحيح الرياضيات بكالوريا 2021 ع تج

الموضوع الثاني

التمرين 1 (4ن)

9 أسئلة { 3 هندسة ← 1, 2, 3 ؛ 4 جبر ← 1, 2, 3, 4 ؛ 2 تحليل ← 1, 2 }

سحب بطاقة واحدة من الصندوق
عدد حالات السحب $C_9^1=9$

1) A: سؤال في الهندسة

$P(A)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$

B: سؤال في التحليل

$P(B)=\frac{2}{9}$

C: سؤال في الجبر يحمل رقما زوجيا (الرقم 2 أو 4)

$P(C)=\frac{2}{9}$

2) D: سحب سؤال رقمه مختلف عن 1 (الرقم 2 أو 3 أو 4)

$P(D)=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$

3) X يرفق بكل بطاقة مسحوبة رقم السؤال المسجل عليها

أ) تبرير مجموعة قيم X :
نهتم بالرقم دون مادة السؤال المطروح فيكون الرقم هو 1 أو 2 أو 3 أو 4
قيم X هي $\{1,2,3,4\}$

ب) قانون احتمال X

| $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X=x_i)$ | 1/3 | 1/3 | 2/9 | 1/9 |

$P(X=1)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$

$P(X=2)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$

$P(X=3)=\frac{2}{9}$

$P(X=4)=\frac{1}{9}$

الأمل الرياضياتي

$E(X)=\sum_{i=1}^{4}p_ix_i$

$=1\times\frac{3}{9}+2\times\frac{3}{9}+3\times\frac{2}{9}+4\times\frac{1}{9}$

$E(X)=19/9$

جـ) $E(2021X+1442)=2021E(X)+1442$

$=2021\left(\frac{19}{9}\right)+1442=\boxed{\frac{51377}{9}}$

التمرين 2 (4ن)

1) الجواب -ب- لأن

$(u_n)$ حسابية حدها الأول $u_0=1$ وأساسها $r=2$

فإن $u_n=u_0+nr=2n+1$

$P_n=e^{u_0}\times e^{u_1}\times e^{u_2}\times\dots\times e^{u_n}$

$=e^{u_0+u_1+\dots+u_n}$

$=e^{\frac{n+1}{2}(u_0+u_n)}$

$=e^{\frac{n+1}{2}[1+2n+1]}$

$=e^{(n+1)(n+1)}=\boxed{e^{(n+1)^2}}$

2) الجواب -أ- لأن

$f(x)=\ln(x^2+2x+3)$

$f(-2-x)=\ln\left((-2-x)^2+2(-2-x)+3\right)$

$=\ln\left(4+\cancel{4x}+x^2-4-\cancel{2x}+3\right)$

$=\ln(x^2+2x+3)=\boxed{f(x)}$

3) الجواب -جـ- لأن

$\lim_{n\to+\infty}\left[\ln(n+1)-\ln(n+2)\right]=\lim_{n\to+\infty}\ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right)$

$=0$

لأن $\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n+2}=1$

4) الجواب -ب- لأن

$(w_n)$ هندسية حدودها موجبة تماما
حدها الأول $w_0$ وأساسها $q$ $(q\neq1)$
فإن $w_n=w_0q^n$

و $v_n=\ln w_n$

$v_{n+1}=\ln w_{n+1}$

$=\ln w_n\times q$

$=\ln w_n+\ln q$

$v_{n+1}=v_n+\ln q$

$(v_n)$ حسابية أساسها $\ln q$

التمرين 3 (5ن)

$u_{n+1}=\frac{3}{8}(u_n+5)$ ، $u_0=0$

1) برهان بالتراجع أن $u_n<3$

$n=0$ : $u_0=0<3$
محققة $P(0)$ صحيحة

نفرض أن $P(n)$ صحيحة ونبرهن صحة $P(n+1)$

$P(n)$ صحيحة : $u_n<3$

$P(n+1)$ صحيحة : $u_{n+1}<3$ ؟

ومنه $u_n<3$ منه $u_n+5<8$ و

$\frac{3}{8}(u_n+5)<\frac{3}{8}(8)$ أي $u_{n+1}<3$

ومن أجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_n<3$

$(u_n)$ محدودة من الأعلى بـ 3 .

2) $u_{n+1}-u_n=\frac{3}{8}u_n+\frac{15}{8}-u_n$

$=-\frac{5}{8}u_n+\frac{15}{8}$

$=\frac{5}{8}(-u_n+3)$

لدينا $u_n<3$ أي $-u_n>-3$ أي $-u_n+3>0$

ومنه $\frac{5}{8}(-u_n+3)>0$ أي $u_{n+1}-u_n>0$

و $(u_n)$ متزايدة تماما .

$(u_n)$ متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بـ 3 فهي متقاربة .

3) $v_n=3(3-u_n) \leftarrow v_n=9-3u_n$

أ) $v_0=3(3-u_0)=9$

$(v_n)$ هندسية

$v_{n+1}=3(3-u_{n+1})$

$=3\left(3-\frac{3}{8}(u_n+5)\right)$

$=9-\frac{9}{8}u_n-\frac{45}{8}$

$=-\frac{9}{8}u_n+\frac{27}{8}$

$=\frac{3}{8}\left[-3u_n+9\right]$

$=\frac{3}{8}(9-3u_n)$

$v_{n+1}=\frac{3}{8}v_n$

$(v_n)$ هندسية أساسها $q=\frac{3}{8}$ وحدها الأول $v_0=9$

ب) $v_n = v_0 q^n = 9\left(\frac{3}{8}\right)^n$

$3u_n = 9 - v_n$ منه $v_n = 9 - 3u_n$

أي $u_n = 3 - \frac{1}{3}v_n$

$u_n = 3 - \frac{1}{3}(9)\left(\frac{3}{8}\right)^n$

$\boxed{u_n = 3 - 3\left(\frac{3}{8}\right)^n}$

جـ) $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} 3 - 3\left(\frac{3}{8}\right)^n = \boxed{3}$

لأن $-1<\frac{3}{8}<1$ و $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{8}\right)^n = 0$

4) $P_n = (3-u_0)(3-u_1)\cdots(3-u_n)$

لدينا $3-u_n = \frac{v_n}{3}$

$P_n = \frac{v_0}{3}\times\frac{v_1}{3}\times\cdots\times\frac{v_n}{3}$

$= \frac{v_0\times v_1\times\cdots\times v_n}{3\times 3\times\cdots\times 3}$

$= \frac{v_0(v_0 q)\cdots(v_0 q^n)}{3^{n+1}}$

$= \frac{v_0^{n+1}\, q^{1+2+\cdots+n}}{3^{n+1}}$

$= \frac{9^{n+1}\, q^{\frac{n}{2}(n+1)}}{3^{n+1}}$

$= \frac{9^{n+1}\left(\frac{3}{8}\right)^{\frac{n^2+n}{2}}}{3^{n+1}}$

$= \frac{(3^2)^{n+1}\left(\frac{3}{8}\right)^{\frac{n^2+n}{2}}}{3^{n+1}}$

$= \frac{(3^{n+1})^2\left(\frac{3}{8}\right)^{\frac{n^2+n}{2}}}{3^{n+1}}$

$P_n = \boxed{3^{n+1}\times\left(\frac{3}{8}\right)^{\frac{n^2+n}{2}}}$

## التمرين 4 (ج)

I) $g(x) = 1 + xe^{-x-1}$

$D = ]-\infty,+\infty[$

1) $g(-1) = 1-1 = 0$

2)

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |

II) $f(x) = x-(x+1)e^{-x-1}$

1) $f(x) = x\left[1-\frac{(x+1)}{x}e^{-x-1}\right]$

$= x\left[1-\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{-x-1}\right]$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x\left[1-\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{-x-1}\right] = \boxed{+\infty}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left[1-\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{-x-1}\right] = \boxed{+\infty}$

2) أ) $f'(x) = 1-\left[e^{-x-1} - e^{-x-1}(x+1)\right]$

$= 1-\left[(1-x-1)e^{-x-1}\right]$

$= 1+xe^{-x-1} = g(x)$

من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$

ب) إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

إذن $f$ متناقصة تماما على $]-\infty,-1]$

ومتزايدة تماما على $[-1,+\infty[$

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $+\infty$ ↘ | $-1$ | ↗ $+\infty$ |

3) أ) $\lim_{x\to+\infty} f(x)-x = \lim_{x\to+\infty} -(x+1)e^{-x-1}$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-xe^{-x}}{e} - e^{-x-1} = \boxed{0}$

$(\Delta)$ معادلة $y=x$ م م مائل لـ $(C_f)$ عند $+\infty$

ب) الوضعية النسبية لـ $(C_f)$ و $(\Delta)$

$f(x)-y = -(x+1)e^{-x-1}$

$= (-x-1)e^{-x-1}$

الإشارة من إشارة $-x-1$

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $-x-1$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| الوضعية | $(C_f)$ فوق $(\Delta)$ | $M$ | $(C_f)$ تحت $(\Delta)$ |

$M(-1,-1)$ نقطة تقاطع $(C_f)$ و $(\Delta)$

جـ) $(C_f)$ يقبل مماسا $(T)$ يوازي $(\Delta)$ معناه $f'(x)=1$ أي $g(x)=1$

أي $1+xe^{-x-1} = 1$

منه $xe^{-x-1}=0$

منه $x=0$ ومنه $(C_f)$ يقبل مماسا $(T)$ في النقطة ذات الفاصلة 0 معادلته

$y = f'(0)(x-0)+f(0)$

$(T): y = \boxed{x-\frac{1}{e}}$

4) أ) $(C_f)$ يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما $\alpha$ و $\beta$

$0,3<\alpha<0,4$

$f$ مستمرة ومتزايدة تماما على $[0,3;0,4]$

$f(0,3) = -0,054$

$f(0,4) = 0,055$

$f(0,3)\times f(0,4)<0$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ لها حل وحيد $0,3<\alpha<0,4$ تحقق $f(\alpha)=0$

إذن $M_1(\alpha,0)$ نقطة تقاطع $(C_f)$ مع حامل محور الفواصل

$-1,9<\beta<-1,8$

$f$ مستمرة ومتناقصة تماما على $[-1,9;-1,8]$

$f(-1,9) = 0,32$

$f(-1,8) = -0,019$

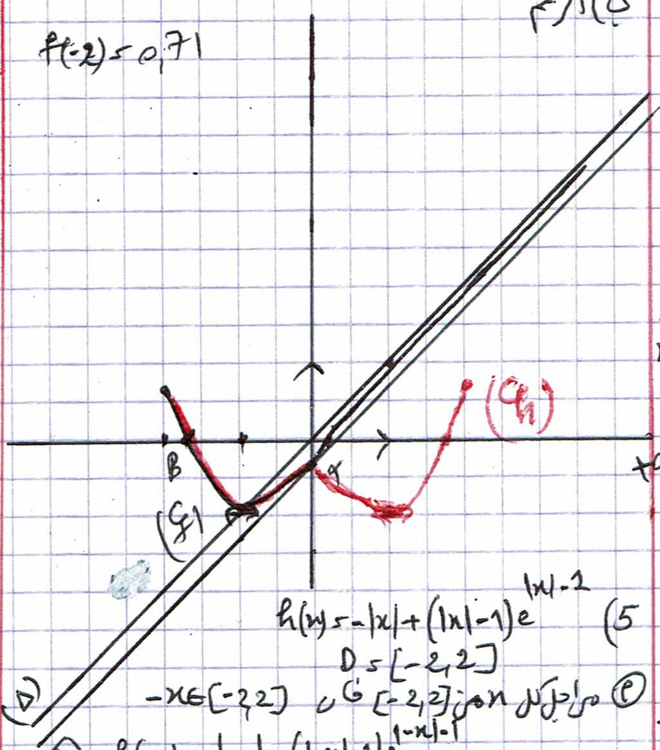
$f(-1,9)\times f(-1,8)<0$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ لها حل وحيد $\beta$ تحقق $f(\beta)=0$ $-1,9<\beta<-1,8$

$M_2(\beta,0)$ نقطة تقاطع $(C_f)$ مع حامل محور الفواصل

ب) الرسم

$f(-2) = 0,71$




5) $h(x) = -|x| + (|x|-1)e^{|x|-1}$

$D = [-2,2]$

أ) من أجل كل $x$ من $[-2,2]$ فإن $-x\in[-2,2]$

$h(-x) = -|-x| + (|-x|-1)e^{|-x|-1}$

$= -|x| + (|x|-1)e^{|x|-1} = h(x)$

$h$ دالة زوجية و $(C_h)$ متناظر بالنسبة لحامل محور التراتيب.

ب) لدينا في المجال $[-2,0]$

| $x$ | $-2$ | $0$ | $2$ |
|---|---|---|---|
| $\lvert x\rvert$ | $-x$ | $0$ | $x$ |

$h(x) = -(-x)+(-x-1)e^{-x-1}$

$= x-(x+1)e^{-x-1} = f(x)$

جـ) $(C_h)$ ينطبق مع $(C_f)$ في $[-2,0]$

في المجال $[0,2]$ $(C_h)$ نظير الجزء الأول المرسوم بالنسبة لحامل محور التراتيب

لأن $h$ زوجية

2021/06/24 الأستاذ بن يسعد فوزي